15-11-16

Άσκηση: Έστω $\alpha, b \in N$ με $(\alpha, b) = 1$.
Τότε νδο: η διοφαντική εξίσωση $\alpha x + by = c$ ⊛
έχει πεπερασμένο πλήθος θετικών ακέραιων λύσεων.

Επειδή $(\alpha, b) = 1 | c \Rightarrow$ η ⊛ έχει πάντα ακέραιες λύσεις

Αν (x_0, y_0) είναι μια ακέραια λύση τότε όλες οι λύσεις δίνονται απ' τους τύπους:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t \quad , \quad y = y_0 - \frac{\alpha}{d} t \quad , \quad t \in Z \Rightarrow (d=1)$$

$\Rightarrow$ $x = x_0 + bt$ $\quad t \in Z$. Ζητάμε $x > 0, y > 0$
$y = y_0 - \alpha t$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_0 + bt > 0 \Rightarrow \\ y_0 - \alpha t > 0 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x_0 > -bt \Rightarrow \\ y_0 > \alpha t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_0 < bt \\ y_0 > \alpha t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -x_0/b \\ t < y_0/\alpha \end{cases} \Rightarrow -\frac{x_0}{b} < t < \frac{y_0}{\alpha}$$

Επειδή $\left(-\frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{\alpha}\right) \cap Z$ είναι πεπερασμένο σύνολο

και $t \in \left(-\frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{\alpha}\right) \cap Z$ έπεται ότι η ⊛

έχει πεπερασμένο πλήθος θετικών ακέραιων λύσεων.

Άσκηση: $6x + 15y = 84$ ⊛

$\alpha = 6,\ b = 15,\ c = 84$

$(\alpha, b) = 3 \mid 84 = 28 \cdot 3 \Rightarrow$ η ⊛ έχει ακέραιες λύσεις

$15 = 2 \cdot 6 + \boxed{3} \rightarrow (\alpha, b) = 3$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

$3 = 15 - 2 \cdot 6 \Rightarrow (-2) \cdot 6 + 1 \cdot 15 = 3 \xRightarrow{\times 28}$

$\Rightarrow (-2) \cdot 28 \cdot 6 + 28 \cdot 15 = 84 \Rightarrow$

$\Rightarrow -56 \cdot 6 + 28 \cdot 15 = 84 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -56 \\ y_0 = 28 \end{cases}$ ακέραια λύση της ⊛

Όλες οι ακέραιες λύσεις της ⊛ είναι:

$$\begin{cases} x = -56 + \frac{15}{3} t \\ y = 28 - \frac{6}{3} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -56 + 5t \\ y = 28 - 2t \end{cases}$$

Αναζητούμε μη-αρνητικές λύσεις της ⊛ διότι τα x, y εκφράζουν πλήθος γραμματοσήμων

Τότε: $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -56 + 5t \geq 0 \\ 28 - 2t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -56 \geq -5t \\ 28 \geq 2t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 56 \leq 5t \\ t \leq \frac{28}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{56}{5} \leq t \leq 14$$

$t = 12, 13, 14$

Οι μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις της ⊛ είναι:

$(4,4)$, $(9,2)$, $(14,0)$

↳ $t=12$ ↳ $t=13$ ↳ $t=14$

<u>Άσκηση</u>: $6x + 4y + 8z = 2$ ⊛

$(6,4,8) = 2 | 2 \Rightarrow$ η ⊛ έχει ακέραιες λύσεις

Η ⊛ γράφεται ισοδύναμα $\Rightarrow 3x + 2y + 4z = 1$ ⊛

Θέτουμε $3x + 2y = \omega$. Τότε από την ⊛ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega + 4z = 1$ ⊛⊛

Τότε $\begin{cases} \omega = 5 \\ z = -1 \end{cases}$ ακέραια λύση της ⊛⊛

Όλες οι ακέραιες λύσεις της ⊛⊛ είναι:

$$x = 5 + \frac{4}{1} t, \quad y = -1 - \frac{1}{1} t \Rightarrow \begin{cases} \omega = 5 + 4t \\ \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Τότε $3x + 2y = \omega = 5 + 4t$, $t \in \mathbb{Z}$ ⊛⊛⊛

$\begin{rcases} x_0 = 5 + 4t \\ y_0 = -5 - 4t \end{rcases} \Rightarrow$ Όλες οι ακέραιες λύσεις της ⊛⊛⊛:

$x = 5 + 4t + 2 \cdot s$, $y = -5 - 4t - 3 \cdot s$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 4t + 2s \\ y = -5 - 4t - 3s \\ z = -1 - t \end{cases}, s \in Z, t \in Z \Bigg\}$$ Όλες οι λύσεις της ⊛

Αν $\alpha \in N$, τότε η δεκαδική παράσταση του α είναι:

$\alpha = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$

$0 \leq i \leq m$, $\alpha_m \neq 0$

$\alpha^* = \alpha_m \cdot 10^{m-1} + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \dots + \alpha_2 \cdot 10 + \alpha_1$

$\{ 10 \cdot \alpha^* + \alpha_0 = \alpha \}$

↳ <u>Κριτήρια Διαιρετότητας</u>

1) $2 | \alpha \Leftrightarrow 2 | \alpha_0$

2) $3 | \alpha \Leftrightarrow 3 | \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m$

3) $4 | \alpha \Leftrightarrow 4 | \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$

4) $5 | \alpha \Leftrightarrow 5 | \alpha_0$

5) $6 | \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} 2 | \alpha_0 \\ 3 | \alpha_0 + \dots + \alpha_m \end{cases}$

6) $7 | \alpha \Leftrightarrow \alpha^* - 2\alpha_0$

↳ <u>Αποδείξεις:</u> 2) $10^n = (9+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k =$

$= 1 + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k}^{x_n} \rightarrow$ πολ/σιο του 9

$10^n = 1 + 9 \cdot x_n$

$\alpha = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 =$

$= \alpha_m (1 + 9 \cdot x_m) + \alpha_{m-1} (1 + 9 \cdot x_{m-1}) + \dots + (1 + 9 x_1) \alpha_1 + \alpha_0$

$= 9 (\underbrace{\alpha_m x_m + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \dots + x_1 \alpha_1}_{A}) + (\alpha_m + \alpha_{m-1} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0)$

$\Rightarrow \alpha = 9 \cdot A + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) \xrightarrow{3|9A} 3|\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 | (\alpha_0 + \dots + \alpha_m)$

<u>πχ:</u> $1011567 \Rightarrow$ Αθροισμα ψηφίων $= 21 \Rightarrow 3|21 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 | 1011567$

6) $7|\alpha \Leftrightarrow 7 | \alpha^* - 2\alpha_0$

"$\Leftarrow$" Εστω ότι $7 | \alpha^* - 2\alpha_0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \alpha^* - 2\alpha_0 = 7k$

$\Rightarrow 10\alpha^* - 20\alpha_0 = 7 \cdot 10k \Rightarrow 10\alpha^* + \alpha_0 - 21\alpha_0 = 7 \cdot 10k \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 7(10k + 3\alpha_0) \Rightarrow 7|\alpha$

"$\Longrightarrow$" Έστω ότι $7|\alpha \Longrightarrow \alpha = 7b$, για κάποιο $b\in\mathbb{Z}$

Τότε: $\alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \dots + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_0 = 7b$

$\Rightarrow 10(\alpha_m \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_2 \cdot 10 + \alpha_1) + \alpha_0 = 7 \cdot b \Longrightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot \alpha^* = 7b - \alpha_0 \Longrightarrow 10\alpha^* - 20\alpha_0 = 7b - \alpha_0 - 20\alpha_0$

$\Longrightarrow 10(\alpha^* - 2\alpha_0) = 7b - 20\alpha_0 - \alpha_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 10(\alpha^* - 20\alpha_0) = 7(b - 3\alpha_0) \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 7 | 10(\alpha^* - 2\alpha_0) \\ (7,10) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7 | \alpha^* - 2\alpha_0$$

Αριθμητικές Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια αριθμητική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς και πεδίο τιμών τους μιγαδικούς. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

Παραδείγματα: $f(n) = e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$

- $\forall\, k \in \mathbb{Z}: g(n) = n^k$
- $h(n) = n!$
- $w(n) = 3n^2 + 15$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

i) $\tau(n)$ = πλήθος θετικών διαιρετών του n

ii) Η συνάρτηση $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$\sigma(n)$ = άθροισμα θετικών διαιρετών του n

iii) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, η $\sigma^k: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ και

$\sigma^k(n)$ = άθροισμα των k-δυνάμεων των θετικών διαιρετών του n

* Συμβολισμός: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\sum_{d|n} d^k$ = άθροισμα k-δυνάμεων των θετικών διαιρετών του n.

Έτσι, αν οι θετικοί διαιρέτες του n είναι $d_1, \dots, d_m$, τότε:

$$\sum_{d|n} d^k = d_1^k + d_2^k + \dots + d_m^k$$

Πχ: $\sigma^5(7) = 1^5 + 7^5$

• $\sigma^0(n) = \sum_{d|n} d^0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{πλήθος διαιρετών}} = \tau(n) \Rightarrow \sigma^0 = \tau$

• $\sigma^1(n) = \sigma$

› **Συνάρτηση Euler**: $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\varphi(n) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n \\ (k,n) = 1 \end{array} \right\} \right|$

πλήθος θετικών ακεραίων του συνόλου

πχ: $\varphi(12) = \left| \{1, 5, 7, 11\} \right| = 4$

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$

→ **Συνάρτηση Möbius**: $\mu: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ 0 & \text{αν } \exists p \text{: πρώτος} \Rightarrow p: p^2 \mid n \\ (-1)^k, & \text{αν η πρωτογενής ανάλυση του } n \text{ είναι: } n = p_1 \ldots p_k \end{cases}$$

↳ Συνάρτηση ζ του Riemann

$\zeta: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\zeta(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$\zeta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$